ed essendo $h = r$, possiamo scrivere: $A_{(ABCDE)} = \dfrac{p \times r}{2}$.

Il ragionamento fatto, valido per qualsiasi poligono circoscritto, ci permette di dire che:

L'area di un **poligono circoscritto** a una circonferenza si ottiene **moltiplicando il perimetro per la misura del raggio e dividendo tale prodotto per due.**

In formule avremo:

$$A = \frac{p \times r}{2}$$

(formula diretta)

$$p = \frac{A \times 2}{r} \qquad r = \frac{A \times 2}{p}$$

(formule inverse)

Esempi

1. Un quadrilatero, circoscritto a una circonferenza avente il raggio lungo 12 cm, ha
tro di 68 cm. Calcolare l'area.

Dati

$r = 12$ cm

$p_{(quadrilatero)} = 68$ cm

Richiesta

$A = ?$

$$A = (68 \times 12) : 2 \text{ cm}^2 = 408 \text{ cm}^2$$

Un poligono, circoscritto a una circonferenza di diametro 16 cm, ha l'area di 31
olare il perimetro del poligono.

ati

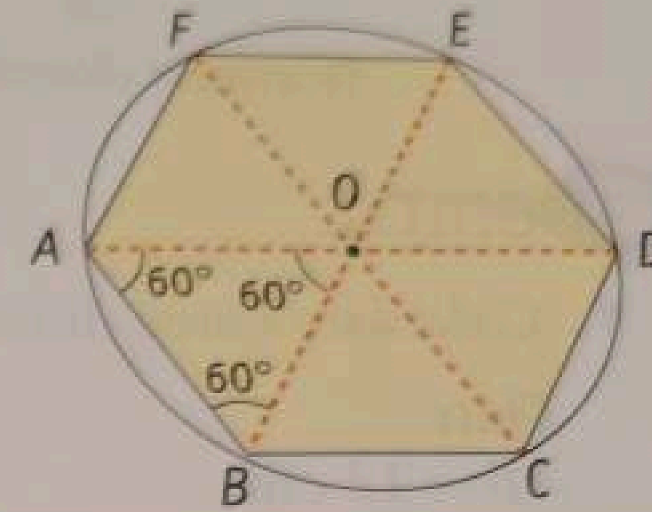
..., $\hat{D}$, ..., H. Il poligono ABCDEFGH è quindi anche **equiangolo**. In definitiva il nostro poligono è **regolare**; il centro O della circonferenza è il suo centro e anche il suo circocentro, in quanto gli assi dei suoi lati passano tutti per il centro della circonferenza. Possiamo quindi dire che:

- Un **poligono regolare si può sempre inscrivere e circoscrivere** a una circonferenza. In esso circocentro e incentro coincidono in un unico punto, che è il centro sia della circonferenza inscritta sia della circonferenza circoscritta e si chiama **centro del poligono**.
- Il raggio della circonferenza circoscritta è il **raggio del poligono**.
- Il raggio della circonferenza inscritta è l'**apotema del poligono**.

Osservazioni su alcuni poligoni regolari

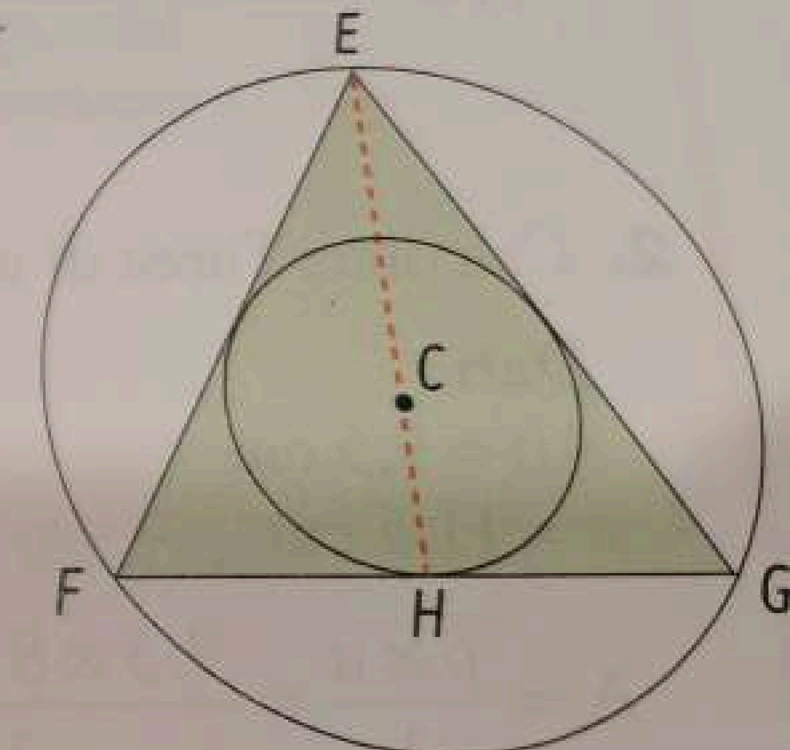
- Per quanto detto, per disegnare un esagono regolare inscritto basta dividere l'angolo al centro in 6 angoli congruenti, tutti di ampiezza 60°. Poiché i sei triangoli che si ottengono sono isosceli, gli angoli alla base di questi triangoli saranno congruenti e ampi ciascuno 60°; in definitiva saranno tutti triangoli equilateri, di conseguenz
BC ... OB, raggio della circonferen

Per quanto detto, per disegnare un esagono regolare inscritto basta dividere l'angolo al centro in 6 angoli congruenti, tutti di ampiezza 60°. Poiché i sei triangoli che si ottengono sono isosceli, gli angoli alla base di questi triangoli saranno congruenti e ampi ciascuno 60°; in definitiva saranno tutti triangoli equilateri, di conseguenza BC, lato dell'esagono, è congruente a OB, raggio della circonferenza circoscritta. Possiamo quindi affermare che:



In un **esagono regolare il lato è congruente al raggio** della circonferenza circoscritta.

- Consideriamo un triangolo equilatero nel quale, essendo esso sia inscrittibile sia circoscrittibile a una circonferenza, circocentro e incentro coincidono con il centro della circonferenza inscritta e circoscritta. Essendo il triangolo equilatero, inoltre, bisettrice, mediana, altezza e asse di ciascun lato coincidono con un unico segmento; incentro, circocentro, ortocentro e baricentro coincidono in un unico punto: C. Il centro C è dunque anche **baricentro** e il segmento EH mediana del nostro triangolo, e, poiché il baricentro divide ogni mediana in due parti una doppia dell'altra, abbiamo: $EC = 2CH$. Possiamo quindi affermare che:

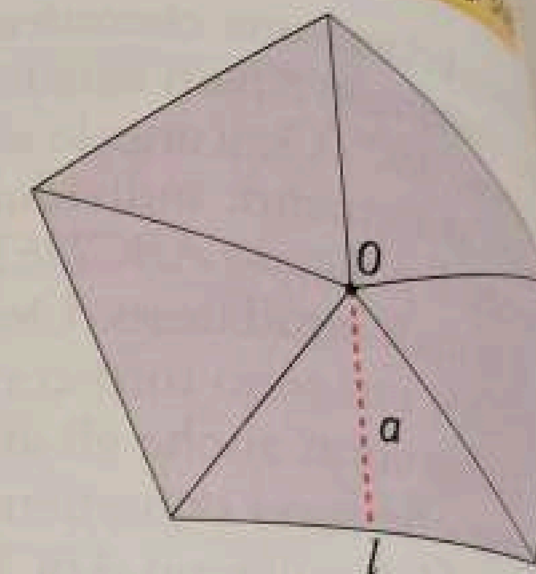


Nel **triangolo equilatero** il raggio della circonferenza circoscritta è il doppio del raggio della cir-conferenza inscritta e quindi **l'apotema è la metà del raggio** o **1/3 dell'altezza**.

L'area dei poligoni regolari

Esercizi pag.

Consideriamo un poligono regolare, per esempio il pentagono della figura, e osserviamo i 5 triangoli congruenti in cui lo si può suddividere unendo il centro con i suoi vertici. In ognuno di questi triangoli la base coincide con un lato del pentagono e l'altezza con l'apotema del poligono. La superficie del pentagono è uguale alla somma delle superfici di questi 5 triangoli; per calcolare l'area del pentagono basterà quindi moltiplicare per 5 l'area di uno di questi triangoli:



$$A = 5 \times \frac{l \times a}{2} = \frac{5 \times l \times a}{2}.$$

Sapendo che $5 \times l = p$, otteniamo: $A = \dfrac{p \times a}{2}$.

Il ragionamento fatto è valido per qualsiasi altro poligono regolare, in quanto ogni poligono regolare si può sempre suddividere in tanti triangoli congruenti quanti sono i suoi lati; diciamo quindi che:

L'area di un **poligono regolare** si ottiene **moltiplicando il perimetro per la misura dell'apotema e dividendo tale prodotto per due.**

In formule avremo:

$$A = \frac{p \times a}{2}$$

(formula diretta)

$$p = \frac{A \times 2}{a} \qquad a = \frac{A \times 2}{p}$$

(formule inverse)

Esempi

1. Calcolare l'area di un esagono regolare avente il lato

l_1 l_2 l_3 $= 0{,}866$.

I risultati delle due prove ci permettono di affermare che in ogni poligono regolare è **costante il rapporto tra apotema e lato**. Tale costante dipende solo dal numero dei lati e prende il nome di **costante del poligono**, ***f***, o anche ***numero fisso***: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{f}$.

Diciamo che:

- In ogni poligono regolare il **rapporto** $\boldsymbol{a/l}$ **è costante** e dipende solo dal numero dei lati: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{f}$.
- In ogni poligono regolare avremo quindi: $\boldsymbol{a = l \times f}$ e $\boldsymbol{l = \dfrac{a}{f}}$.

Riportiamo le costanti di alcuni poligoni regolari; tali costanti sono tutti numeri decimali, illimitati, non periodici (tranne quella del quadrato che è un numero decimale finito), che vengono usati approssimati a meno di un millesimo.

Poligono	Numero fisso f	Poligono	Numero fisso f
triangolo equilatero	0,289	ottagono regolare	1,207
quadrato	0,5	ennagono regolare	1,374
pentagono regolare	0,688	decagono regolare	1,539
esagono regolare	0,866	endecagono regolare	1,703
ettagono regolare	1,038	dodecagono regolare	1,866

Esempi

1. Calcolare la misura dell'apotema di un esagono il cui lato è lungo 20 c

Dati

$l = 20$ cm

Richiesta

$a = ?$

$$A = l^2 \times \varphi.$$

In generale, possiamo quindi dire che:

- In ogni poligono regolare il **rapporto tra l'area e il quadrato della misura del lato è costante,** $\frac{A}{l^2} = \varphi$, e dipende solo dal numero dei lati.
- L'area di un **poligono regolare** si ottiene **moltiplicando il quadrato della misura del lato per il numero fisso φ.**

In formule avremo:

$$A = l^2 \times \varphi \text{ (formula diretta)} \qquad l = \sqrt{\frac{A}{\varphi}} \text{ (formula inversa)}$$

Osserva nella seguente tabella questi nuovi numeri fissi per i principali poligoni regolari.

Poligono	Numero fisso	Poligono	Numero fisso	Poligono	Numero fisso
triangolo	$\varphi = 0{,}433$	esagono	$\varphi = 2{,}598$	ennagono	$\varphi = 6{,}182$
quadrato	$\varphi = 1$	ettagono	$\varphi = 3{,}634$	decagono	$\varphi = 7{,}694$
pentagono	$\varphi = 1{,}720$	ottagono	$\varphi = 4{,}828$	dodecagono	$\varphi = 11{,}196$

Risolvi i seguenti problemi.

103. Il lato di un pentagono regolare misura 1,8 dm.
Calcola perimetro e area del pentagono (approssima a meno di 0,01).

[9 dm; 5,57 dm^2]

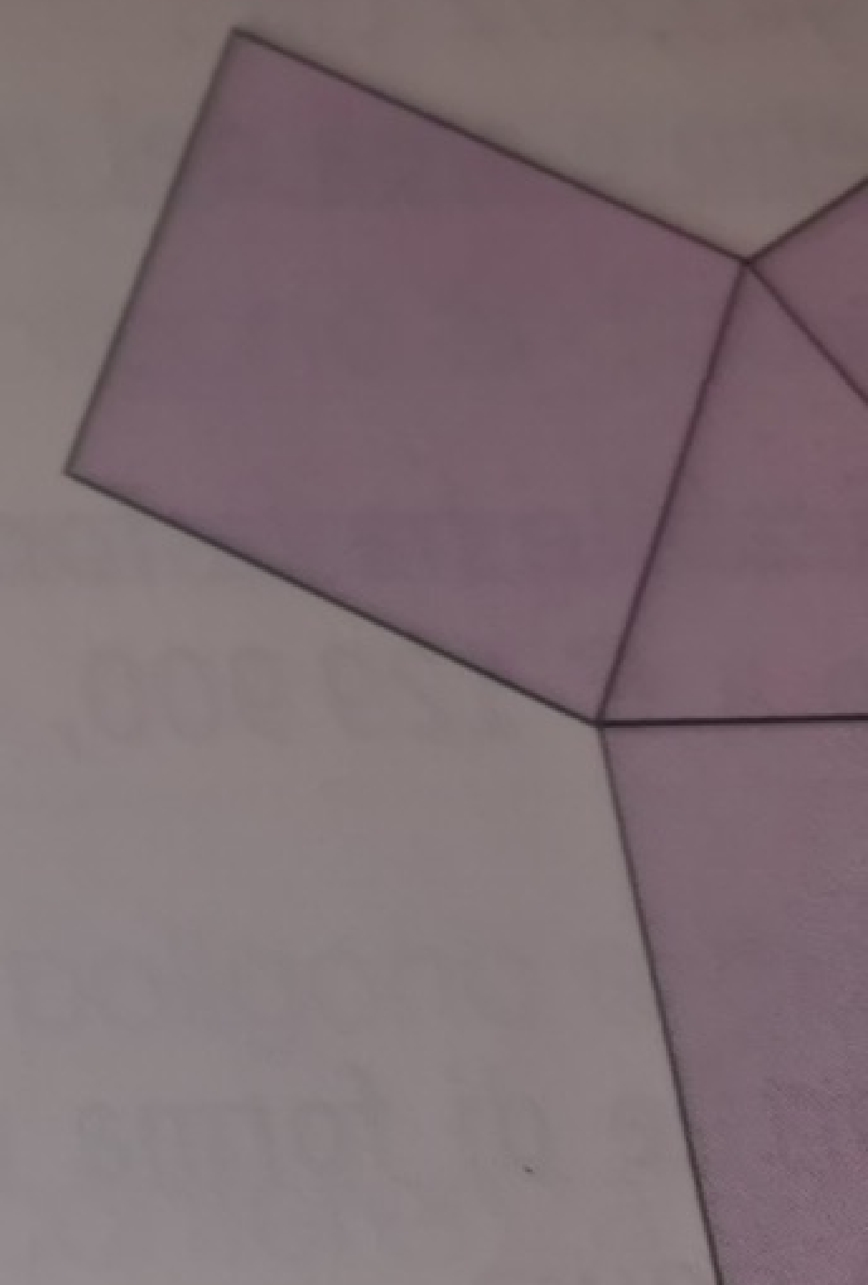
104. Il lato di un ottagono regolare è lungo 3,2 cm.
Calcola perimetro e area dell'ottagono (approssima a meno di 0,01).

[25,6 cm; 49,44 cm^2]

105. Un pentagono regolare ha l'area di 387 m^2 e l'apotema lungo 10,32 m.
Calcolane il perimetro (risolvilo nei due modi possibili).

[75 m]

112. Sui lati di un triangolo eq
l'area di 173,20 cm^2, son
tre quadrati. Calcola l'ar
del poligono così ottenut



113. Esternamente a
segnati quattro

105. ... golare ha l'area di 387 m^2 e l'apotema lungo 10,32 m.
Calcolane il perimetro (risolvilo nei due modi possibili).

[75 m]

106. Il perimetro di un pentagono regolare è 250 cm.
Calcola il perimetro di un rettangolo ad esso equivalente e avente la base lunga 86 cm.

[272 cm]

107. L'area di un esagono regolare misura 374,112 dm^2.
Calcola la misura del raggio del cerchio inscritto.

[10,392 dm]

108. Calcola il perimetro e l'area di un ettagono regolare sapendo che il lato misura 12 cm.

[84 cm; 523,296 cm^2]

113. Esternamente a un
segnati quattro es
lato il lato del qu
rimetro del quadr
perimetro del po

114. L'apoten
38,97 c
Calcola

374,112 dm^2. ... regolare misura
Calcola la misura del raggio del cerchio inscritto.

[10,392 dm]

108. Calcola il perimetro e l'area di un ettagono regolare sapendo che il lato misura 12 cm.
[84 cm; 523,296 cm^2]

109. L'area di un ottagono regolare è 173,808 dm^2. Calcola la misura del lato dell'ottagono.
[6 dm]

110. Il perimetro di un decagono regolare è di 200 cm.
Calcola il perimetro di un rombo equivalente ai 3/8 del decagono e avente l'altezza lunga 30 cm. [153,88 cm]

111. Un decagono regolare è equivalente ad un rettangolo avente il perimetro di 486 cm e una dimensione uguale agli 8/19 dell'altra.
Calcola la misura del lato del decagono.
[≅ 40 cm]

[1 640,

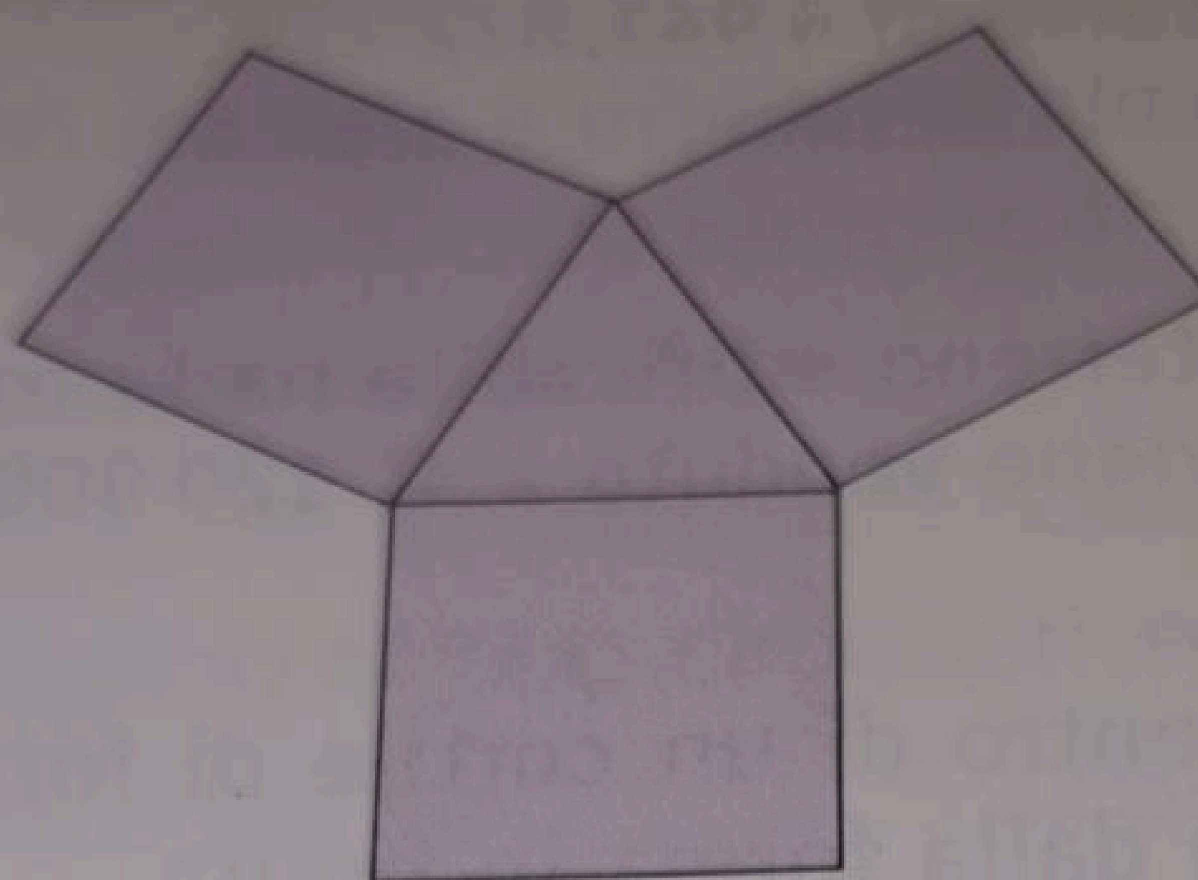
114. L'apotema di un esag... 38,97 cm.
Calcola la misura del... di un rombo ad ess... la diagonale minore...

115. Il perimetro di ... 200 cm.
Calcola la misu... lo equivalent... lunga 85 cm.

116. Il lato di un... te alla bas... di 369 cm... Calcola p...

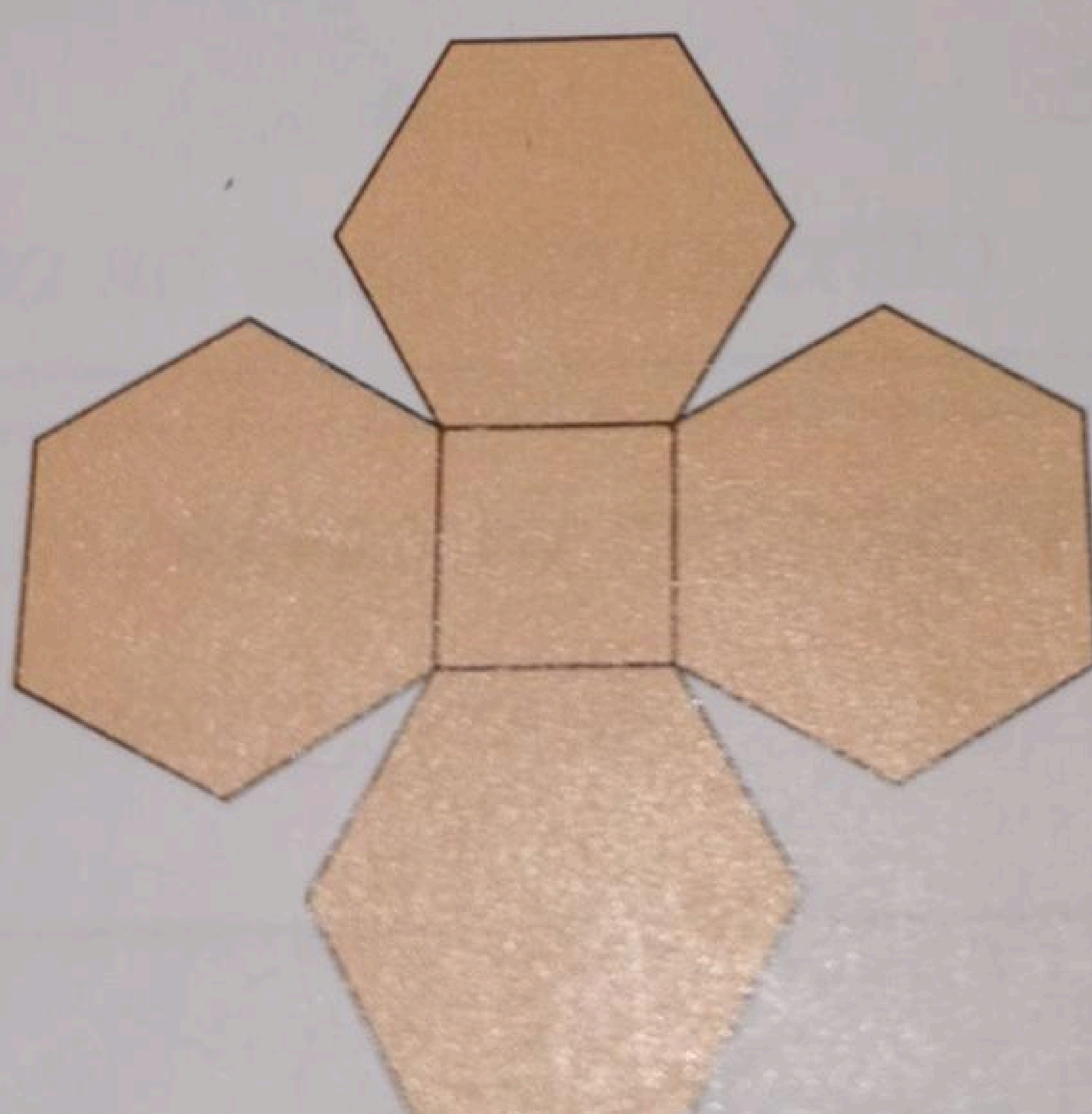
misura
tagono
dm^2]
ungo
(ap-
n^2]
n^2
e

112. Sui lati di un triangolo equilatero, avente l'area di 173,20 cm^2, sono stati disegnati tre quadrati. Calcola l'area e il perimetro del poligono così ottenuto.



[1 373,20 cm^2; 180 cm]

113. Esternamente a un quadrato sono stati disegnati quattro esagoni regolari aventi per lato il lato del quadrato. Sapendo che il perimetro del quadrato è 48 cm, calcola area e perimetro del poligono così ottenuto.



[1 640,448 cm^2; 240 cm]

4. L'apotema di un esagono regolare misura